3. PROBABILIDAD

3.1. DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD

La **probabilidad** mide la frecuencia con la que se obtiene un resultado (o conjunto de resultados) al llevar a cabo un experimento aleatorio, del que se conocen todos los resultados posibles, bajo condiciones *suficientemente* estables. La teoría de la probabilidad se usa extensamente en áreas como la estadística, la física, la matemática, la ciencia y la filosofía para sacar conclusiones sobre la probabilidad de sucesos potenciales y la mecánica subyacente de sistemas **complejos.**

Historia

El estudio científico de la probabilidad es un desarrollo moderno. Los juegos de azar muestran que ha habido un interés en cuantificar las ideas de la probabilidad durante milenios, pero las descripciones matemáticas exactas de utilidad en estos problemas sólo surgieron mucho después.

Según Richard Jeffrey, "Antes de la mitad del siglo XVII, el término 'probable' (en latín *probable*) significaba *aprobable*, y se aplicaba en ese sentido, unívocamente, a la opinión y a la acción. Una acción u opinión probable era una que las personas sensatas emprenderían o mantendrían, en las circunstancias."[1]

Aparte de algunas consideraciones elementales hechas por Girolamo Cardano en el siglo XVI, la doctrina de las probabilidades data de la correspondencia de Pierre de Fermat y Blaise Pascal (1654). Christiaan Huygens (1657) le dio el tratamiento científico conocido más temprano al concepto. *Ars Conjectandi* (póstumo, 1713) de Jakob Bernoulli y *Doctrine of Chances* (1718) de Abraham de Moivre trataron el tema como una rama de las matemáticas. Véase *El surgimiento de la probabilidad* (*The Emergence of Probability*) de Ian Hacking para una historia de los inicios del desarrollo del propio concepto de probabilidad matemática.

La teoría de errores puede trazarse atrás en el tiempo hasta *Opera Miscellanea* (póstumo, 1722) de Roger Cotes, pero una memoria preparada por Thomas Simpson en 1755 (impresa en 1756) aplicó por primera vez la teoría para la discusión de errores de observación. La reimpresión (1757) de esta memoria expone los axiomas de que los errores positivos y negativos son igualmente probables, y que hay ciertos límites asignables dentro de los cuales se supone que caen todos los errores; se discuten los errores continuos y se da una curva de la probabilidad.

Pierre-Simon Laplace (1774) hizo el primer intento para deducir una regla para la combinación de observaciones a partir de los principios de la teoría de las probabilidades. Representó la ley de la probabilidad de error con una curva $y = \varphi(x)$, siendo x cualquier error e y su probabilidad, y expuso tres propiedades de esta curva:

1. es simétrica al eje *y*;
2. el eje *x* es una asíntota, siendo la probabilidad del error ∞ igual a 0;
3. la superficie cerrada es 1, haciendo cierta la existencia de un error.

Dedujo una fórmula para la media de tres observaciones. También obtuvo (1781) una fórmula para la ley de facilidad de error (un término debido a Lagrange, 1774), pero una que llevaba a ecuaciones inmanejables. Daniel Bernoulli (1778) introdujo el principio del máximo producto de las probabilidades de un sistema de errores concurrentes.

El método de mínimos cuadrados se debe a Adrien-Marie Legendre (1805), que lo introdujo en su *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes* (*Nuevos métodos para la determinación de las órbitas de los cometas*). Ignorando la contribución de Legendre, un escritor irlandés estadounidense, Robert Adrain, editor de "The Analyst" (1808), dedujo por primera vez la ley de facilidad de error,

$$\phi(x) = ce^{-h^2x^2}$$

siendo *c* y *h* constantes que dependen de la precisión de la observación. Expuso dos demostraciones, siendo la segunda esencialmente la misma de John Herschel (1850). Gauss expuso la primera demostración que parece que se conoció en Europa (la tercera después de la de Adrain) en 1809. Demostraciones adicionales se expusieron por Laplace (1810, 1812), Gauss (1823), James Ivory (1825, 1826), Hagen (1837), Friedrich Bessel (1838), W. F. Donkin (1844, 1856) y Morgan Crofton (1870). Otros personajes que contribuyeron fueron Ellis (1844), De Morgan (1864), Glaisher (1872) y Giovanni Schiaparelli (1875). La fórmula de Peters (1856) para *r*, el error probable de una única observación, es bien conocida.

En el siglo XIX, los autores de la teoría general incluían a Laplace, Sylvestre Lacroix (1816), Littrow (1833), Adolphe Quetelet (1853), Richard Dedekind (1860), Helmert (1872), Hermann Laurent (1873), Liagre, Didion, y Karl Pearson. Augustus De Morgan y George Boole mejoraron la exposición de la teoría.

En 1930 Andréi Kolmogorov desarrolló la base axiomática de la probabilidad utilizando teoría de la medida.

En la parte geométrica (véase geometría integral) los colaboradores de *The Educational Times* fueron influyentes (Miller, Crofton, McColl, Wolstenholme, Watson y Artemas Martin).

Teoría

La probabilidad constituye un importante parametro en la determinación de las diversas causalidades obtenidas tras una serie de eventos esperados dentro de un rango estadístico.

Existen diversas formas como método abstracto, como la teoría Dempster-Shafer y la teoría de la relatividad numérica, esta última con un alto grado de aceptación si se toma en cuenta que disminuye considerablemente las posibilidades hasta un nivel mínimo ya que somete a todas las antiguas reglas a una simple ley de relatividad. Así mismo es la parte de ley.

3.2. ENFOQUES PARA ASIGNAR PROBABILIDADES

Tipos de enfoque: el enfoque racional, el enfoque de racionalidad limitada, el enfoque del procedimiento organizativo y el enfoque de estilo de decisión.
El enfoque racional se basa en las siguientes hipótesis: el decisor tiene información perfecta, no existen las fases de inteligencia y diseño, es decir, la decisión solamente considera la fase de elección y el decisor siempre intenta maximizar su función de utilidad. Bajo estas hipótesis, que es lo que se denomina hombre económico, el proceso de decisiones es muy sencillo y lo único que tiene que hacer el decisor es conseguir el máximo beneficio o la máxima utilidad en el caso del consumidor. Debido a que estas hipótesis no son nada realistas se paso al segundo enfoque.
El enfoque de racionalidad limitada. Según este enfoque el sujeto decisor no tiene información perfecta y si quisiera conseguir esa información perfecta le costaría tanto mucho tiempo como mucho dinero. Por lo tanto se pasa del hombre económico, aquel que intenta maximizar su función de utilidad, al hombre administrativo, que adopta un comportamiento satisfactorio, es decir, cuando encuentra una alternativa que considera satisfactoria ya no busca más, no llega a elegir la mejor sino la que considera bastante buena.
Tanto el enfoque anterior como el de racionalidad limitada son análisis que consideran un decisor individual, el siguiente por el contrario analiza la toma de decisiones dentro de las organizaciones, donde existen múltiples decisiones.
El enfoque del procedimiento organizativo. Según este enfoque los individuos tienen objetivos propios, pero las organizaciones no, por lo tanto las decisiones que se toman dentro de la organización son el resultado de la negociación entre los individuos que allí trabajan. Este enfoque considera que la empresa o organización tiene múltiples objetivos. El criterio de selección según este enfoque será que la alternativa elegida satisfaga a los individuos que trabajan en esa organización.
El enfoque de los estilos de decisión. Este enfoque considera que cada decisor es único, por lo que cada uno utilizará un estilo propio para enfrentarse a la toma de decisiones, por lo tanto para conocer porque un individuo ha tomado una decisión concreta habrá que analizar sus habilidades y estratégicas personales. Hay directivos que actúan rápidamente y toman decisiones intuitivas.

MATRIZ DE DECISIÓN
Componentes de la matriz de decisión:

1. Las alternativas.
2. Los estados de la naturaleza.
3. Las probabilidades de ocurrencia de los estados de la naturaleza.
4. Los resultados llamados también consecuencias.
5. Los criterios de decisión.

1. Son los cursos de acción que están bajo el control del decisor (lo puede controlar). Ejemplo: puede renovar el activo o conservar el viejo.
2. No están bajo el control del decisor. Son variables que influyen en el problema que intentamos solucionar pero que el decisor no controla.
3. A cada uno de los estados de la naturaleza se le asigna una probabilidad según su ocurrencia esperada.
4. A cada combinación de estado de la naturaleza y de alternativa se le asigna un resultado.
5. Muestra como utilizar la información anterior para seleccionar la mejor alternativa.

Distintos criterios de decisión:

1. El ambiente de certeza. En este caso se conoce cual es el estado de la naturaleza que se va a presentar, así elegiremos la alternativa que maximice nuestro beneficio o minimice nuestra pérdida.
2. Las decisiones en ambiente de riesgo. No sabemos que estado de la naturaleza se va a presentar pero si que conocemos las probabilidades de presentación de cada uno de los estados de naturaleza.
3. Los criterios utilizados con incertidumbre parcial. No somos capaces de asociar a cada estado de la naturaleza su probabilidad de ocurrencia. Por lo tanto, los criterios que se utilizan para elegir la mejor alternativa son criterios subjetivos.

- El criterio pesimista.
- El criterio optimista.
- El criterio de Laplace.
- El decisor piensa que una vez elegida una alternativa, siempre se va a presentar el estado de la naturaleza peor, por eso elegirá aquella alternativa que le ofrece los mínimos perjuicios.
- Piensa lo contrario que el anterior. Piensa que una vez elegida una alternativa siempre se va a presentar el estado de naturaleza más favorable, por lo tanto elegirá aquella alternativa que le supone mayores beneficios en el mayor de los casos.
- Este criterio dice que si no somos capaces de asignar probabilidades a los estados de naturaleza es porque todos ellos tienen la misma probabilidad de ocurrencia. Por eso se asigna la

misma probabilidad a cada uno de los estados de la naturaleza (0,5/0,5).

Las decisiones en incertidumbre total. No somos capaces ni de calcular las probabilidades subjetivas de los distintos estados de la naturaleza. En este caso el decisor tendrá que acudir a su experiencia e intuición para poder elegir la mejor alternativa. Como no existen criterios cuantitativos para poder seleccionar la mejor alternativa el decisor tendrá que guiarse por criterios cualitativos.

OTROS ENFOQUES QUE HAY QUE TOMAR EN CUENTA

En la vida cotidiana aparecen muchas situaciones en las que los resultados observados son diferentes aunque las condiciones iniciales en las que se produce la experiencia sean las mismas.

Debido al importante papel desempeñado por la probabilidad dentro de la estadística, es necesario familiarizarse con sus elementos básicos, lo que constituye el objetivo del presente documento.

Comienza con una motivación sobre la incertidumbre y los distintos grados de incertidumbre, relacionándolos de manera intuitiva con los enfoques más tradicionales para asignar probabilidades.

Posteriormente, se introduce el sentido de la probabilidad en términos de experimentos aleatorios, espacio muestral, sucesos, etc., llegando a la formalización axiomática de la probabilidad y sus principales propiedades, junto con las expresiones de la probabilidad condicionada y los teoremas de la probabilidad compuesta o del producto, de la probabilidad total y de Bayes.

Esta lección tiene los siguientes objetivos:

- Familiarizar al lector con experiencias de la vida cotidiana en las que interviene el azar
- Comprender los enfoques de la probabilidad más usuales así como sus peculiaridades, ventajas e inconvenientes
- Conocer la axiomática de la probabilidad formulada por Kolmogorov
- Manejar el lenguaje de la probabilidad, sus propiedades y aplicarlo a problemas concretos
- Entender los teoremas de la probabilidad producto, la probabilidad total y el de Bayes

3.3. REGLAS PARA CÁLCULO DE PROBABILIDAD

Existen algunas reglas que son útiles para el cálculo de la probabilidad, de manera genérica se dividen en reglas de la adición y reglas de la multiplicación, aunque cada una tiene casos especiales.

Regla especial de la adición. Establece que si dos eventos A y B son mutuamente excluyentes la probabilidad de que uno u otro evento ocurra es igual a la suma de sus probabilidades.

REGLA ESPECIAL DE LA ADICIÓN	P(A o B) = P(A) + P(B)

De lo anterior se puede deducir que la probabilidad de que ocurra A más la probabilidad de que no ocurra A debe sumar 1. A esto se le llama la regla del complemento. Esta regla establece que para determinar la probabilidad de que ocurra un evento se puede restar de 1 la probabilidad de que no ocurra. En una fórmula se establece de la siguiente manera:

REGLA DEL COMPLEMENTO	P(A) = 1 – P(~ A)

Regla general de la adición. Establece que si dos eventos A y B no son mutuamente excluyentes la probabilidad de que ocurra uno u otro es igual a la suma de sus probabilidades menos la probabilidad de que ocurran ambos de manera simultánea.

REGLA GENERAL DE LA ADICIÓN	P(A o B) = [P(A) + P(B)] – P(A y B)

Regla especial de la multiplicación. Establece que si dos eventos A y B son independientes la probabilidad de que ocurran ambos se calcula multiplicado sus probabilidades.

Se dice que dos eventos son independientes cuando la ocurrencia de uno no afecta la probabilidad de ocurrencia del otro.

REGLA ESPECIAL DE LA MULTIPLICACIÓN	P(A y B) = P(A) P(B)

Regla general de la multiplicación. Establece que si dos eventos A y B no son independientes la probabilidad de que los dos eventos ocurran se encuentra multiplicando la probabilidad de que ocurra A por la probabilidad condicional de que ocurra B si ocurre A.

REGLA GENERAL DE LA MULTIPLICACIÓN	P(A y B) = P(A) P(B | A)

Análisis combinatorio

Se llama *combinación* al número de maneras de escoger r objetos de un grupo de n objetos sin importar el orden. La fórmula para calcular las combinaciones es:

FÓRMULA PARA LAS COMBINACIONES	${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

Teorema de Bayes

El teorema de Bayes sirve para calcular, a partir de que ha ocurrido un suceso B, las probabilidades de un suceso A. La fórmula de Teorema de Bayes es la siguiente:

$$P(A1 | B1) = \frac{P(A1)\,P(B1 | A1)}{P(A1)\,P(B1 | A1) + P(A2)\,P(B1 | A2) + P(A\,n)\,P(B1 | A\,n)}$$

3.3.1. REGLAS DE ADICIÓN

Regla especial de la adición. Establece que si dos eventos A y B son mutuamente excluyentes la probabilidad de que uno u otro evento ocurra es igual a la suma de sus probabilidades. De lo anterior se puede deducir que la probabilidad de que ocurra A más la probabilidad de que no ocurra A debe sumar 1. A esto se le llama la regla del complemento. Esta regla establece que para determinar la probabilidad de que ocurra un evento se puede restar de 1 la probabilidad de que no ocurra.

La Regla de la Adición expresa que: la probabilidad de ocurrencia de al menos dos sucesos A y B es igual a: P(A o B) = P(A) U P(B) = P(A) + P(B) si A y B son mutuamente excluyente P(A o B) = P(A) + P(B) - P(A y B) si A y B son no excluyentes Siendo: P(A) = probabilidad de ocurrencia del evento A P(B) = probabilidad de ocurrencia del evento B P(A y B) = probabilidad de ocurrencia simultanea de los eventos A y B

ejemplo: Si A y B son dos eventos que no son mutuamente excluyentes, entonces P(A o B) se calcula con la siguiente fórmula: P(A o B) = P(A) + P(B) - P(A y B) El Diagrama de Venn ilustra esta regla

ejemplo: En una muestra de 500 estudiantes, 320 dijeron tener un estéreo,

175 dijeron tener una TV y 100 dijeron tener ambos Si un estudiante es seleccionado aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que tenga sólo un estéreo, sólo una TV y uno de cada uno? P(S) = 320 /500 = .64. P(T) = 175 /500 = .35. P(S y T) = 100 /500 = .20.

Si un estudiante es seleccionado aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que tenga un estéreo o una TV en su habitación? P(S o T) = P(S) + P(T) - P(S y T) = .64 +.35 - .20 = .79.

3.3.2. REGLAS DE MULTIPLICACIÓN

R I N C I P I O M U L T I P L I C A T I V O También llamado “Principio fundamental de conteo”: Si una decisión, operación o acción, puede tomarse de M formas diferentes y sí después de que ha sido efectuada de una de esas formas, una segunda decisión puede tomarse de N formas diferentes, entonces el número total de formas diferentes en que las dos decisiones pueden tomarse siguiendo el orden mencionado es igual a M x N. Es decir: Si hay m formas de hacer una cosa, y n formas de hacer otra, existirán m x n formas de hacer ambas. I.I.II

Ejemplos Un Club esta en el período de elecciones de la nueva Comisión Directiva. Hay tres candidatos a presidente, cuatro a vicepresidente, cinco para secretario y dos para tesorero.¿Cuántos resultados diferentes puede tener la elección? Respuesta: El número total de resultados distintos en que puede terminar la elección es igual a: 3 x 4 x 5 x 2 = 120 Reglas de la Multiplicación Se refieren a la determinación de la probabilidad de la ocurrencia conjunta de A y B. Existen dos acepciones de esta regla:

1) Si los eventos de independientes: P(A y B) = P(A ∩ B) = P(A)P(B)
2) 2) Si los eventos son dependientes: Es la probabilidad de A multiplicada por la probabilidad condicional de B dado A. P(A y B) = P(A)P(B|A) Si la posición de los dos eventos se invierte, se obtiene un valor equivalente. P(A y B) = P(B y A) = P(B)P(A|B)

EJEMPLOS 1) Si una moneda equilibrada se lanza dos veces, la probabilidad de que ambos lanzamientos den por resultado una “cara” es : (1/2) x (1/2) = (1/4) Reglas de Multiplicación Se relacionan con la determinación de la ocurrencia de conjunta de dos o más eventos. Es decir la intersección entre los conjuntos de los posibles valores de A y los valores de B, esto quiere decir que la probabilidad de que ocurran conjuntamente los eventos A y B es: P(A y B) = P(A B) = P(A)P(B) si A y B son independientes P(A y B) = P(A B) = P(A)P(B|A) si A y B son dependientes P(A y B) = P(A B) = P(B)P(A|B) si A y B son dependientes

3.4. DIAGRAMA DE ÁRBOL

Para la construcción de un diagrama en árbol se partirá poniendo una rama para cada una de las posibilidades, acompañada de su probabilidad.

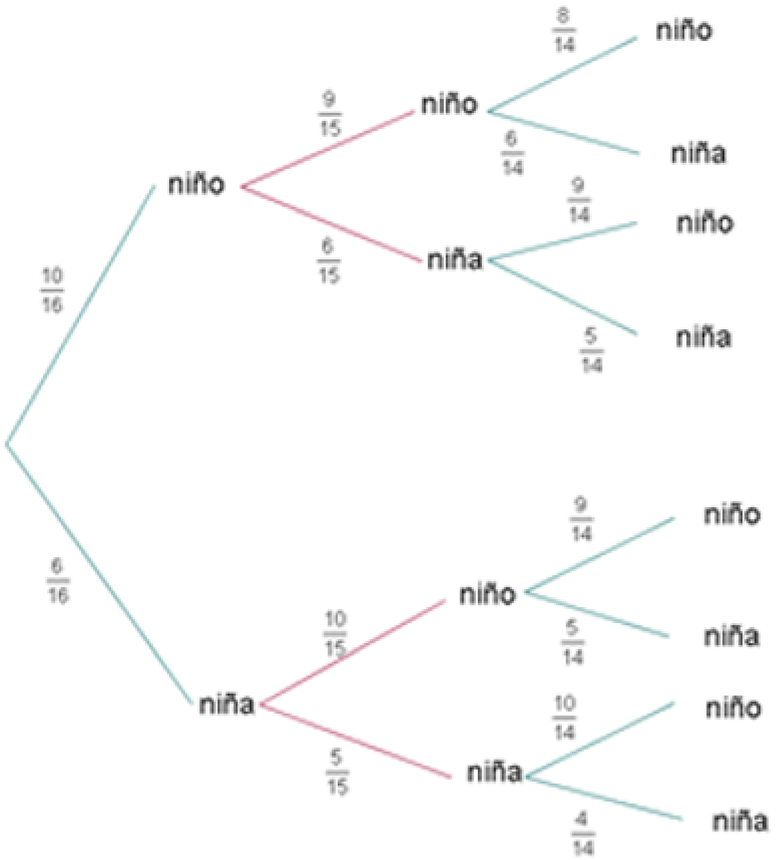
En el final de cada rama parcial se constituye a su vez, un nudo del cual parten nuevas ramas, según las posibilidades del siguiente paso, salvo si el nudo representa un posible final del experimento (nudo final).

Hay que tener en cuenta: que la suma de probabilidades de las ramas de cada nudo ha de dar 1.

Ejemplos

Una clase consta de seis niñas y 10 niños. Si se escoge un comité de tres al azar, hallar la probabilidad de:

1 Seleccionar tres niños.



$$p\left(3\ \textit{niños}\right) = \frac{10}{16} \cdot \frac{9}{15} \cdot \frac{8}{14} = 0.214$$

2Seleccionar exactamente dos niños y una niña.

$$p\left(2\ \textit{niños y 1 niña}\right) = \frac{10}{16} \cdot \frac{9}{15} \cdot \frac{6}{14} + \frac{10}{16} \cdot \frac{6}{15} \cdot \frac{9}{14} + \frac{6}{16} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} = 0.482$$

3Seleccionar exactamente dos niñas y un niño.

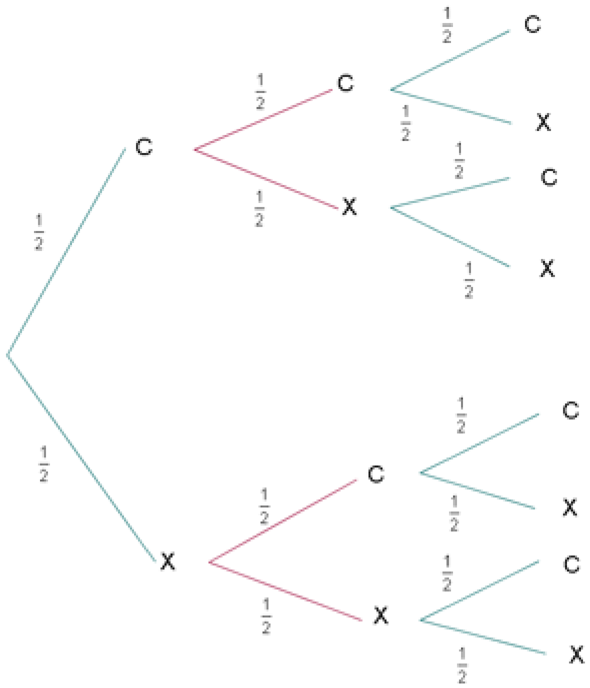
$$p\left(2\ \textit{niñas y 1 niño}\right) = \frac{10}{16} \cdot \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14} + \frac{6}{16} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{14} + \frac{6}{16} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} = 0.268$$

1 Seleccionar tres niñas.

$$p\left(3\ \textit{niñas}\right) = \frac{6}{16} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = 0.0357$$

Calcular la probabilidad de que al arrojar al aire tres monedas, salgan:

Tres caras.



$$p(3c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

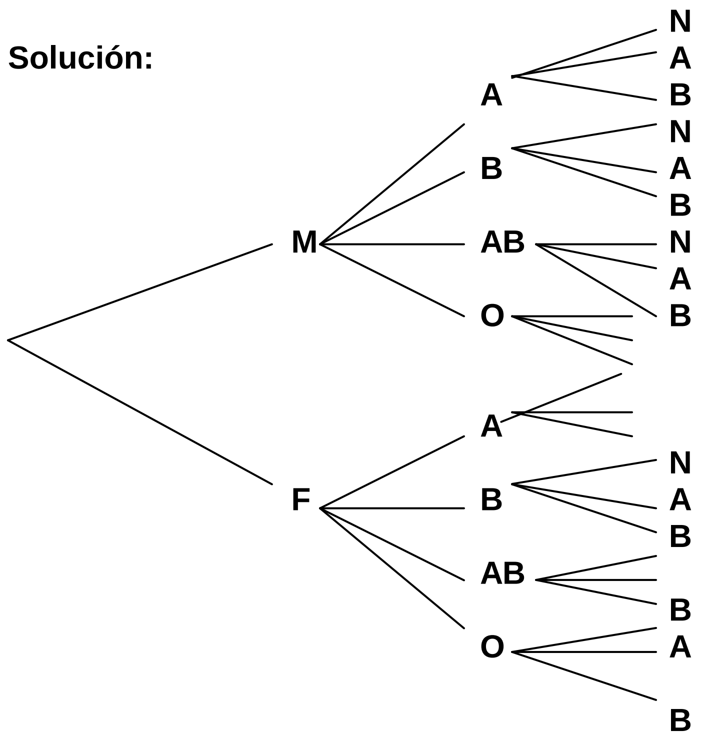
OTROS ENFOQUES DEL DIAGRAMA DEL ARBOL

Un diagrama de árbol es una representación gráfica de un experimento que consta de *r* pasos, donde cada uno de los pasos tiene un número finito de maneras de ser llevado a cabo.

Ejemplos:

Un médico general clasifica a sus pacientes de acuerdo a: su sexo (masculino o femenino), tipo de sangre (A, B, AB u O) y en cuanto a la presión sanguínea (Normal, Alta o Baja). Mediante un diagrama de árbol diga en cuantas clasificaciones pueden estar los pacientes de este médico?

Solución:

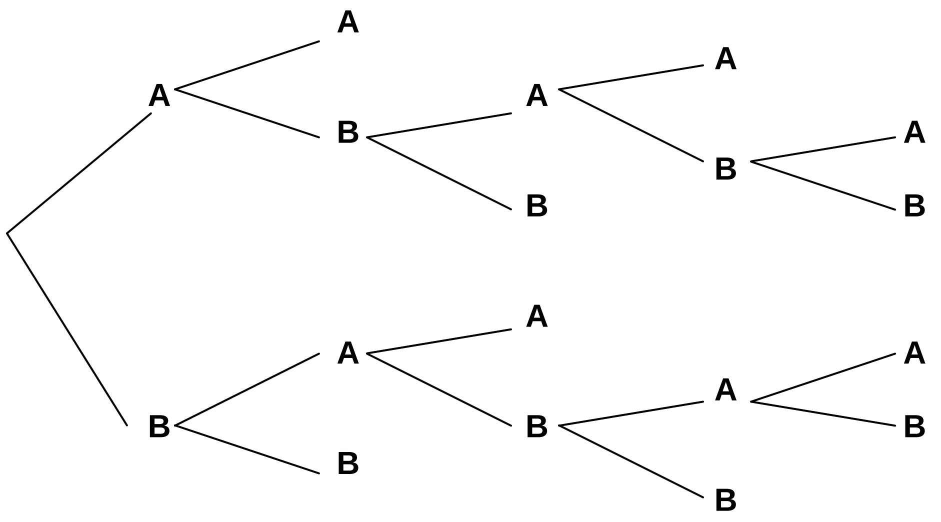


Si contamos todas las ramas terminales, nos damos cuenta que el número de clasificaciones son 2 x 4 x 3 = 24 mismas que podemos enumerar;
MAN, MAA, MAB, MBN, MBA, MBB, etc, etc.

1) 1) **Dos equipos denominados A y B se disputan la final de un partido de baloncesto, aquel equipo que gane dos juegos seguidos o complete un total de tres juegos ganados será el que gane el torneo. Mediante un diagrama de árbol diga de cuantas maneras puede ser ganado este torneo,**

Solución:

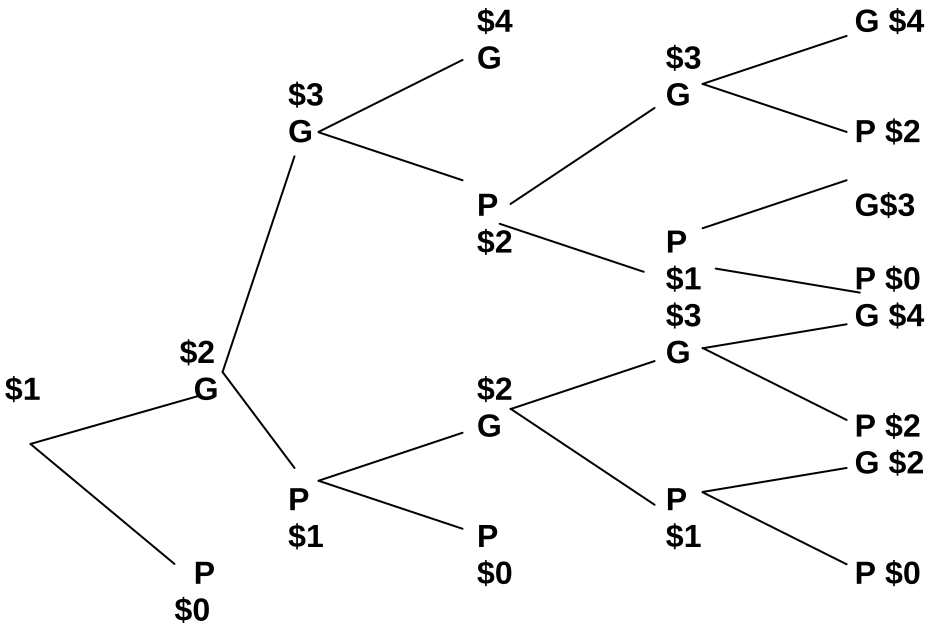
A = gana el equipo A
B = gana el equipo B



En este diagrama se muestran que hay solo diez maneras de que se gane el torneo, que se obtienen contando las ramas terminales de este diagrama de árbol, las que es posible enumerar;
AA, ABB, ABAA, ABABA, ABABB, etc, etc.

2) 2) **Un hombre tiene tiempo de jugar ruleta cinco veces como máximo, él empieza a jugar con un dólar, apuesta cada vez un dólar y puede ganar o perder en cada juego un dólar, él se va a retirar de jugar si pierde todo su dinero, si gana tres dólares (esto es si completa un total de cuatro dólares) o si completa los cinco juegos, mediante un diagrama de árbol, diga cuántas maneras hay de que se efectué el juego de este hombre.**

Solución:



Si contamos las ramas terminales nos daremos cuenta que hay 11 maneras de que este hombre lleve a cabo sus apuestas, en este diagrama se han representado los cinco juegos o apuestas que este hombre tiene tiempo de jugar

3.5. TABLAS DE CONTINGENCIAS Y TEOREMA DE BAYES

Un método útil para clasificar los datos obtenidos en un recuento es mediante las tablas de contingencia.

Se trata de tablas en cuyas celdas figuran probabilidades, y en la cual podemos determinar unas probabilidades conociendo otras de la tabla.

Ejemplo

Se sortea un viaje a Roma entre los 120 mejores clientes de una agencia de automóviles. De ellos, 65 son mujeres, 80 están casados y 45 son mujeres casadas. Se pide:

1¿Cuál será la probabilidad de que le toque el viaje a un hombre soltero?

2Si del afortunado se sabe que es casado, ¿cuál será la probabilidad de que sea una mujer?

	Hombres	Mujeres	
Casados		45	80
Solteros			
		65	120

	Hombres	Mujeres	
Casados	35	45	80
Solteros	20	20	40
	55	65	120

$$p(\text{hombre soltero}) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

$$p(\text{mujer} / \text{casado}) = \frac{45}{80} = 0.5625$$

TEOREMA DE BAYES

El Teorema de BAYES se apoya en el proceso inverso al que hemos visto en el Teorema de la Probabilidad Total:
Teorema de la probabilidad total: a partir de las probabilidades del suceso A (probabilidad de que llueva o de que haga buen tiempo) deducimos la probabilidad del suceso B (que ocurra un accidente).

Teorema de Bayes: a partir de que ha ocurrido el suceso B (ha ocurrido un accidente) deducimos las probabilidades del suceso A (¿estaba lloviendo o hacía buen tiempo?).

La fórmula del Teorema de Bayes es:

$$P(Ai/B) = \frac{P(Ai) * P(B/Ai)}{\Sigma P(Ai) * P(B/Ai)}$$

Tratar de explicar estar fórmula con palabras es un galimatías, así que vamos a intentar explicarla con un ejemplo. De todos modos, antes de entrar en el ejercicio, recordar que este teorema también exige que el suceso A forme un sistema completo.

Primer ejemplo.

El parte meteorológico ha anunciado tres posibilidades para el fin de semana:

a) Que llueva: probabilidad del 50%.

b) Que nieve: probabilidad del 30%

c) Que haya niebla: probabilidad del 20%.

Según estos posibles estados meteorológicos, la posibilidad de que ocurra un accidente es la siguiente:
a) Si llueve: probabilidad de accidente del 20%.

b) Si nieva: probabilidad de accidente del 10%

c) Si hay niebla: probabilidad de accidente del 5%.

Resulta que efectivamente ocurre un accidente y como no estabamos en la ciudad no sabemos que tiempo hizo (llovío, nevó o hubo niebla). El teorema de Bayes nos permite calcular estas probabilidades:
Las probabilidades que manejamos antes de conocer que ha ocurrido un accidente se denominan "probabilidades a priori" (lluvia con el 50%, nieve con el 30% y niebla con el 20%).

Una vez que incorporamos la información de que ha ocurrido un accidente, las probabilidades del suceso A cambian: son probabilidades condicionadas P (A/B), que se denominan "probabilidades a posteriori".

Vamos a aplicar la fórmula:

$$P(Ai/B) = \frac{P(Ai) * P(B/Ai)}{\Sigma P(Ai) * P(B/Ai)}$$

a) Probabilidad de que estuviera lloviendo:

$$P(Ai/B) = \frac{0{,}50 * 0{,}20}{(0{,}50 * 0{,}20) + (0{,}30 * 0{,}10) + (0{,}20 * 0{,}05)} = 0{,}714$$

La probabilidad de que efectivamente estuviera lloviendo el día del accidente (probabilidad a posteriori) es del 71,4%.

b) Probabilidad de que estuviera nevando:

$$P(Ai/B) = \frac{0{,}30 * 0{,}10}{(0{,}50 * 0{,}20) + (0{,}30 * 0{,}10) + (0{,}20 * 0{,}05)} = 0{,}214$$

La probabilidad de que estuviera nevando es del 21,4%.

c) Probabilidad de que hubiera niebla:

$$P(Ai/B) = \frac{0{,}20 * 0{,}05}{(0{,}50 * 0{,}20) + (0{,}30 * 0{,}10) + (0{,}20 * 0{,}05)} = 0{,}071$$

La probabilidad de que hubiera niebla es del 7,1%

Otro ejemplo.

En una etapa de la producción de un artículo se aplica soldadura y para eso se usan tres diferentes robots. La probabilidad de que la soldadura sea defectuosa varía para cada uno de los tres, así como la proporción de artículos que cada uno procesa, de acuerdo a la siguiente tabla.

robot	defectuosos	art. procesados
A	0.002	18 %
B	0.005	42 %
C	0.001	40 %

Ahora podemos hacernos un par de preguntas:

- Cuál es la proporción global de defectos producida por las tres máquinas.
- Si tomo un artículo al azar y resulta con defectos en la soldadura, cuál es la probabilidad de que haya sido soldado por el robot C.

a) La primera pregunta nos va a llevar a lo que se conoce con el nombre de fórmula de la probabilidad total.

Queremos conocer la proporción global de defectos delos tres robots. Después de reflexionar un momento se ve que si todas las soldaduras las pusiera el robot C, habría pocos defectos, serían 0.001 o 0.1%. En cambio, si todas las pone el B, ¡sería un desastre!, tendríamos cinco veces más: 0.005 o 0.5%. De modo que en nuestra respuesta debemos tener en cuenta las diferentes proporciones de lo maquinado en cada robot.

Nuestra idea es empezar por descomponer el evento ``defectuoso'' en ``viene del robot A y es defectuoso'' o ``viene del robot B y es defectuoso'' o ``viene del robot C y es defectuoso''. En símbolos tendremos

P(d) = P(A y d) + P(B y d) + P(C y d)

ó

P(d) = P(A) P(d|A) + P(B) P(d|B) + P(C) P(d|C)

Antes de ponerle números y resolver nuestro problema fijémonos en la fórmula obtenida.

Hay tres eventos A, B y C que son ajenos y cubren todo el espacio muestral. Conocemos las probabilidades de cada uno de ellos. Además, conocemos las probabilidades condicionales de otro evento dado cada uno de ellos.

La fórmula de arriba se llama fórmula de la probabilidad total.

Llenando con nuestros números, tenemos que

P(d) = (0.18)(0.002) + (0.42)(0.005) + (0.40)(0.001)

o sea que P(d) = 0.00286 casi 3 piezas por cada mil.

Es bueno comparar este resultado con los porcentajes de soldaduras defectuosas de cada robot por separado. Podemos ver que el resultado se encuentra entre todas ellas y se encuentra relativamente cerca de los porcentajes de los robots más utilizados (el B y el C). Esto es muy razonable.

b) La segunda pregunta es, a la vez más simple y más complicada. Nos va a llevar a lo que se conoce con el nombre de teorema de Bayes.

La probabilidad que buscamos es una condicional pero al revés de las que tenemos. Buscamos

P(C | d)

para calcularla usamos la definición de probabilidad condicional:

P(C | d) = [P(C y d)] / [P(d)]

El numerador (lo de arriba) lo calculamos con

P(C y d) = P(C) P(d|C)

y el denominador lo calculamos con la fórmula de probabilidad total

P(d) = P(A) P(d|A) + P(B) P(d|B) + P(C) P(d|C) juntando las dos tenemos la fórmula de Bayes:

P(C|d) = [P(C) P(d|C)] / [P(A) P(d|A) + P(B) P(d|B) + P(C) P(d|C)] Aplicándola a nuestro caso tenemos

P(C|d) = [(0.40)(0.001)]/[(0.18)(0.002) + (0.42)(0.005) + (0.40)(0.001)]

o sea

P(C|d) = [0.0004]/[0.00286] = 0.1399

casi 14%.

O sea que si tomamos una pieza al azar, la probabilidad de que haya sido soldada por el robot C es alta, 40%. Pero, como ese robot produce sólo 1 de cada mil soldaduras defectuosas, al saber que la pieza seleccionada es defectuosa, la probabilidad de que provenga del robot C disminuye a solamente 14%. Esto quiere decir que, en este caso el saber que la soldadura es defectuosa, nos provee con una gran cantidad de información.

Si analizáramos, usando de nuevo la fórmula de Bayes las probabilidades de los robots A y B, tendríamos

P(B|d) = 0.7343 y P(A|d) = 0.1259

Comparadas con las probabilidades de cada máquina sin saber que la pieza es defectuosa vemos un gran incremento en la probabilidad de B.

Si, por el contrario la pieza no hubiese tenido defectos de soldadura, el mismo teorema de Bayes nos daría (haga Ud. las cuentas y ¡fíjese que no me haya equivocado yo!):

P(A|no d) = 0.1802 P(B|no d) = 0.4191 y P(C|no d) = 0.4007

Las probabilidades no son idénticas a las probabilidades no condicionales, pero la diferencia es muy pequeña.

Para apreciar mejor el cambio, pongamos en una sola tabla las probabilidades iniciales y las condicionales obtenidas bajo el conocimiento de la soldadura de la pieza.

Robot	P( )	P(|d)	P(|no d)
A	0.18	0.1259	0.1802
B	0.42	0.7343	0.4191
C	0.40	0.1399	0.4007

Es tan grande el éxito de los tres robots en el soldado correcto que el saber que la pieza no tiene defectos, prácticamente no altera las probabilidades de produción en uno u otro.

Por el contrario, el robot C es tan bueno, comparado con el B que, al saber que la pieza es defectuosa, las probabilidades cambian dramáticamente.

En este ejemplo el cálculo de probabilidades condicionales nos cuantifica algo que el sentido común nos dice de otra forma. Note que la fórmula de Bayes nos sirvió para pasar de las probabilidades no condicionales a las condicionales.

Otro ejemplo más del uso del teorema de Bayes.

Otro ejemplo clásico del uso del teorema de Bayes es un problema de oro y plata. Hay tres bolsas que tienen, cada una dos monedas. Las de la primera son de oro, las de la segunda son de plata y las de la tercera son una de plata y otra de oro. Se escoje una bolsa al azar y de ella una moneda también al azar. Si la moneda es de oro, ¿cuál es la probabilidad de que la otra moneda en la bolsa sea de oro también?

Primero notemos que la segunda bolsa no pudo haber sido elegida (porque no tiene monedas de oro), sólo pudo haber sido seleccionada la primera o la tercera. Si la bolsa elegida hubiese sido la tercera, el evento cuya probabilidad nos interesa no se realiza. De modo que el evento que nos interesa es equivalente a que se haya elegido la primera bolsa.

Una vez establecido lo anterior, apliquemos el teorema de Bayes para calcular:

$$P(1^a|Au) = [P(1^a)P(Au|1^a)] / [P(1^a)P(Au|I) + P(2^a)P(Au|2^a) + P(3^a)P(Au|3^a)]$$

Las probabilidades que entran al lado derecho de la igualdad las sacamos, inmediatamente, de las condiciones del problema y después de hacer cuentas tenemos:

$$P(1^a|Au) = 2 / 3$$

Este problema es clásico porque existe una "solución" a la que muchas personas llegan y es falsa. El argumento es el siguiente. Como todas las bolsas son igualmente posibles, y el hecho de que la primer moneda extraída sea de oro, nos indica que no se trata de la segunda bolsa. Concluimos que las dos bolsas restantes tienen igual probabilidad y, por tanto, la probabilidad de que la otra moneda sea de oro es 1/2.

Si Ud. piensa de acuerdo a este razonamiento (¡erróneo!), es muy difícil que encuentre en qué se equivoca.

Lo que está mal es que lo que averiguamos, al saber que la moneda extraída es de oro, es algo más que el rechazo de la segunda bolsa. Si sólo nos dijeran que la bolsa escogida al azar no fue la segunda, sin informarnos del metal de la moneda sacada, todavía tendríamos incertidumbre respecto a la primera moneda; todavía podríamos apostar a si ésta es de oro o de plata. Al decirnos que la moneda fué de oro, estamos aprendiendo algo más, y eso echa por tierra el argumento de "igual probabilidad para las dos bolsas restantes".

La información con la que contamos nos indica que nos hallamos frente a un caso en el que la bolsa era la primera y sacamos, o la primera de las monedas que contenia, o la segunda, (ya llevamos 2 posibilidades), o bien la bolsa era la tercera y en ese caso tan solo podría ser que sacáramos en primer lugar la moneda de oro, luego la que queda dentro es de plata (una única posibilidad). Tenemos 3 posibles sucesos en los que en 2 de ellos sacaríamos a continuacion una moneda de oro (2/3 de probabilidad), y tan solo una de las veces la nueva moneda sería de plata (1/3 de probabilidad).

Lo interesante del problema es que, si nos hubieran dicho que la moneda sacada fué de plata, aplicando la fórmula de Bayes, llegamos a la conclusión de que la probabilidad de que la otra moneda sea también de plata es 2/3 [¡Haga Ud. las cuentas!].

Es decir, si vamos a apostar al metal de la otra moneda, nos conviene apostar por el metal de la primera.

Este ejemplo nos lleva a reflexionar sobre el uso adecuado de la información contenida en "lo dado" en el cálculo de la probabilidad condicional.

Una última cuestión: Suponga que asiste a uno de los numerosos programas de televisión en los que después de haber hecho el payaso/a (o mostrado sus habilidades) para diversión de la audiencia, le ofrecen que escoja una de 3 puertas que esconden un gran regalo (un coche, un apartamento, etc..) una de ellas y las otras 2 no contienen nada. Tras elegir usted una, el presentador o presentadora del programa abre una de las que rechazó, mostrando que no contenía nada (esto siempre lo podrá hacer, eliga usted la que eliga) y le da la oportunidad de plantarse con la que escogió inicialmente o cambiar a la otra que queda aún sin abrir. ¿que debería hacer?. Tenga en cuenta que después de conocer el contenido de una de las puertas que no eligió inicialmente "sabe algo mas que al principio". Una pista: no es indiferente plantarse o cambiar, uno de los 2 comportamientos es mas ventajoso que el otro.

BIBLIOGRAFIA SUGERIDA

DURÁ PEIRÓ J.M., LÓPEZ CUÑAT J.M.: "Fundamentos de Estadística. Estadística descriptiva y modelos probabilísticos para la inferencia", Ed. Ariel Economía, 1988. (Teoría-Problemas)
Notas. Libro de probabilidad de teoría con muchísimos ejemplos resueltos. También tiene problemas al final de cada capítulo con la solución corta al final del libro.

QUESADA V., ISIDORO, LÓPEZ: "Curso y Ejercicios de Estadística", Ed. Alhambra, 1989. (Problemas-Teoría)
Notas. Existen ejemplares en: biblioteca de Matemáticas, Biología, Inf./Est. Tiene muchos problemas resueltos de Estadística Descriptiva, Probabilidad e Inferencia Paramétrica (también problemas propuestos). Contiene un breve resumen teórico de cada tema.

RUIZ CAMACHO M., MORCILLO AIXELÁ M.C., GARCÍA GALISTEO J., CASTILLO VÁZQUEZ C.: "Curso de Probabilidad y Estadística", Ed. Universidad de Málaga / Manuales, 2000.(Teoría-Problemas)
Notas. Existen ejemplares en: biblioteca de Matemáticas. Un libro de teoría muy "didáctico" de Estadística Descriptiva y Probabilidad. Contiene problemas resueltos y propuestos, al final de cada bloque teórico.

SARABIA VIEJO A., MATE JIMÉNEZ C.: "Problemas de Probabilidad y Estadística. Elementos teóricos, cuestiones, aplicaciones con Statgraphics", Ed. CLAGSA, 1993. (Problemas)
Notas. Existen ejemplares en: biblioteca de Matemáticas. Tiene muchos problemas resueltos de Estadística Descriptiva, Probabilidad e Inferencia Paramétrica (también problemas propuestos). Resuelve algunos problemas con el programa Statgraphics en su versión de MSDOS.

WALPOLE R.E., MYERS R.H., MYERS S.L.: "Probabilidad y Estadística para Ingenieros", Ed. Prentice Hall, 1998, 6ª edición.(Teoría)
Notas. Existen ejemplares en: ¿?. Un libro de teoría muy "didáctico" de Estadística Descriptiva, Probabilidad, Inferencia Paramétrica, Inferencia No Paramétrica y Diseño de Experimentos. Contiene problemas propuestos después de cada apartado tratado (solución corta de problemas impares) y con muchos ejemplos prácticos resueltos en el desarrollo del temario.